http://math.uni.lu/parlier/ hugo.parlier@uni.lu

Exercices 11

1. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement croissante ou décroissante. Montrer que $J = f(I)$ est également un intervalle.

2. Décider lesquelles des fonctions suivantes sont uniformément continues sur le domaine donné. Justifier vos réponses en utilisant l'argument ou le théorème de votre choix.

a) $f(x) = x^3 \sin(x) - e^x \sin(3x)$ pour $x \in [0, \pi]$.
b) $f(x) = x^3$ pour $x \in [0, 1]$.
c) $f(x) = x^3$ pour $x \in]0, 1[$.
d) $f(x) = x^3$ pour $x \in \mathbb{R}$.
e) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ pour $x \in]0, 1]$.
f) $f(x) = \sin \frac{1}{x^2}$ pour $x \in]0, 1]$.
g) $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x^2}$ pour $x \in]0, 1]$.

3. Soit $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$.

a) Montrer que f est uniformément continue sur $(0, 1]$.
b) Montrer que f est uniformément continue sur $[1, +\infty[$.

4. Soit f une fonction continue définie sur $[0, +\infty[$.

a) Montrer que si f est uniformément continue sur $[b, +\infty[$ pour un $b \geq 0$, alors f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.
b) Déduire que $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

5. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Montrer que la fonction f^* définie par

$$f^* = \sup\{f(y) : a \leq y \leq x\}$$

pour $x \in [a, b]$ est une fonction croissante et uniformément continue.